数理解析研究所講究録
621巻 1987年 73-90

$\mathbb{P}^3$のCurveのBasic Sequenceについて

京大数理研　尼崎睦実

$\mathbb{P}^3$の nonsingular irreducible curve を分類するのに basic sequence と呼ばれるものを定義して考えていく試みをしているので、今どの程度のことになっているかを述べておく。目下のところ、これからきちんとしたものとして様になっていくかどうかは保証の限りでない。

以下 curve とは 体 k 上の完備1次元スキームで embedded pointをもたないものとする。簡単のため、k は標数0の代数的閉体とする。[A2; notation] にある記号は断りなしに用いる。

§1. Basic Sequence の定義

Xを$\mathbb{P}^3$の curve, $\mathcal{I}$をその ideal sheaf, $I = \bigoplus_{v\geq 0} I_v = H^0_*(\mathcal{I}) \subset R := k[x_1, x_2, x_3, x_4]$ とする。

<u>Definition</u> 次の条件を満たす整数列 $(a;\overline{n}^1;\overline{n}^2)=(a;n_1,\cdots,n_a;n_{a+1},\cdots,n_{a+b})$ をXの basic sequence と呼び記号で $B(X)$ と書く。

(1) $a\leqq n_1\leqq\cdots\leqq n_a,\quad n_1\leqq n_{a+1}\leqq\cdots\leqq n_{a+b}.$

(2) $\dim_k I_n=\binom{n-a+3}{3}_+ + \sum_{i=1}^{a}\binom{n-n_i+2}{2}_+ + \sum_{j=1}^{b}\binom{n-n_{a+j}+1}{1}_+$

ただし、$\binom{\nu}{i}_+=\begin{cases}\binom{\nu}{i} & \text{for } \nu\geqq i\\ 0 & \text{for } \nu<i\end{cases}$

(3) homogeneous coordinates x_1,x_2,x_3,x_4 を general にとったとき、$H^1_*(\mathcal{I})$ の $k(2)$-module としての minimal free resolution

$$0\longrightarrow k(2)[-\overline{\varepsilon}^2]\xrightarrow{G}k(2)[-\overline{\varepsilon}^1]\xrightarrow{H}k(2)[-\overline{\varepsilon}^0]\longrightarrow H^1_*(\mathcal{I})\to 0$$

を考えると、数列 $\overline{\varepsilon}^0=(\varepsilon^0_1,\dots,\varepsilon^0_p)$, $\overline{\varepsilon}^1=(\varepsilon^1_1,\cdots,\varepsilon^1_q)$, $\overline{\varepsilon}^2=(\varepsilon^2_1,\cdots,\varepsilon^2_r)$ は x_1,x_2,x_3,x_4 のとり方によらず $H^1_*(\mathcal{I})$ の構造でのみ定まる。このとき $\overline{n}^2=\overline{\varepsilon}^2$ (up to permutation) となる。

<u>$B(X)$の存在の証明</u>

$\mathbb{P}^3$の斉次座標は十分 general にとってあるものとする。

Step 1). $a=\min\{i\mid I_i\neq(0)\}$, f_0をx_1に関して monic な I_aの元とする。$\Gamma=R/I+(x_3,x_4)R$ とおき、Γの$k[x_2]$-module としての minimal free resolution

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{a} k[x_2][-n_i] \xrightarrow{A} \bigoplus_{i=0}^{a-1} k[x_2][-i] \xrightarrow{(1, x_1, x_1^2, \cdots, x_1^{a-1})} \Gamma \longrightarrow 0$$

をとると、横ベクトル $F^1 := (1, x_1, x_1^2, \cdots, x_1^{a-1})A$ は $I+(x_3, x_4)R$ の元を成分とする。そこで I の斉次多項式 f_i $(1 \leq i \leq a)$ をとって $(f_1, \cdots, f_a) \equiv F^1 \pmod{(x_3, x_4)R}$ となるようにする。このとき $\deg f_i = n_i$ $(1 \leq i \leq a)$。Γ を自然に $\bigoplus_{i=0}^{a-1} x_1^i k[x_2]$ の k-sub-vector-space と思えば，k-vector spaces としての直和

$$(1.1) \qquad \left(\bar{\bar{f}}_0 k[x_1, x_2] \oplus \bigoplus_{i=1}^{a} \bar{\bar{f}}_i k[x_2]\right) \oplus \Gamma = k[x_1, x_2]$$

が成立する。ただし $\bar{\bar{f}}_i = f_i(x_1, x_2, 0, 0)$ $(0 \leq i \leq a)$。

step 2) $\bar{f}_i = f_i(x_1, x_2, x_3, 0)$ $(0 \leq i \leq a)$ とおくと、(1.1) より

$$(1.2) \quad \left(\bar{f}_0 k[x_1, x_2, x_3] \oplus \bigoplus_{i=1}^{a} \bar{f}_i k[x_2, x_3]\right) \oplus \left(\Gamma \otimes_k k[x_3]\right) = k[x_1, x_2, x_3]$$

となるから $R/I+x_4R$ は $k[x_3]$-module としての minimal free resolution で次のようなもの

$$(1.3) \quad 0 \to \bigoplus_{j=1}^{b} k[x_3][-n_{a+j}] \xrightarrow{B} \Gamma \otimes_k k[x_3] \xrightarrow{(\gamma_1, \cdots, \gamma_c)} R/I+x_4R \to 0$$

を持つ。ただし $(\gamma_1, \cdots, \gamma_c)$ は Γ の k-basis。横ベクトル $F^2 := (\gamma_1, \cdots, \gamma_c)B$ は $I+x_4R$ の元を成分とするから、I の斉次多項式 f_{a+j} $(1 \leq j \leq b)$ があって $(f_{a+1}, \cdots, f_{a+b}) \equiv F^2 \pmod{x_4R}$ となる。このとき $\deg f_{a+j} = n_{a+j}$ $(1 \leq j \leq b)$ であり、$\bar{f}_{a+j} =$

$f_{a+j}(x_1,x_2,x_3,0)$ とおけば、単因子論より、k-vector space として

(1.4) $\Gamma\otimes_k k[x_3]=\left(\bigoplus_{j=1}^{b}\bar{f}_{a+j}k[x_3]\right)\oplus\{(k[x_3]\text{-free module})\oplus(k\text{-free module})\}$ 。

step 3) x_4 は R/I regular と思ってよいから (1.2), (1.4) より

(1.5) $I=f_0k(0)\oplus\bigoplus_{i=1}^{a}f_ik(1)\oplus\bigoplus_{j=1}^{b}f_{a+j}k(2)$

となることがわかる。

ここまでで (1), (2) を満たすような整数列 $(a;n_1,\cdots,n_a;n_{a+1},\cdots,n_{a+b})$ はできた。(3) については次のようにする。

step 4) (1.3) を $k(2)$-modules の exact sequence にもちあげる。

$$0\longrightarrow k(2)[-\bar{n}^2]\xrightarrow{\tilde{B}}\Gamma\otimes_k k(2)\xrightarrow{(\gamma_1,\cdots,\gamma_c)}R/I\longrightarrow 0\ .$$

これから得られる exact sequence $(\mathfrak{n}:=(x_3,x_4)k(2))$

$$0\to H^1_*(\mathcal{I})=H^1_{\mathfrak{n}}(R/I)\to H^2_{\mathfrak{n}}(k(2)[-\bar{n}^2])\xrightarrow{\tilde{B}}H^2_{\mathfrak{n}}(\Gamma\otimes_k k(2))$$

に、$\mathrm{Hom}_k(\ ,k)$ をほどこした後、$k(2)$-module としての duality を用いると、minimal generators から始まる free resolution

$$\Gamma\otimes_k k(2)[-2]\xrightarrow{{}^t\tilde{B}}k(2)[\bar{n}^2-2]\longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{k(2)}(H^1_{\mathfrak{n}}(R/I),k(2))[-2]\to 0$$

を得る。一方(3)の resolution からは minimal free resolution

$$k(2)[\overline{\varepsilon}^1-2] \xrightarrow{{}^tG} k(2)[\overline{\varepsilon}^2-2] \longrightarrow \mathrm{Ext}^2_{k(2)}(H^1_n(R/I), k(2))[-2] \longrightarrow 0$$

が得られ、両者を比較して $\overline{n}^2 = \overline{\varepsilon}^2$ (up to permutation) となる。

<u>Remarks</u> 1) B(X) が X で一意的に定まることは条件 (1), (2), (3) より明らかである。

2) X が arithmetically Cohen-Macaulay $\iff b=0$。この場合の定義は [G-P.1] にある。

3) resolution (1.3) が minimal であるから $1 \leqq j \leqq b$ に対して $f_{a+j}(x_1, x_2, 0, 0) = 0$ となる。

§2. I の Free Resolution

M を graded R-module, $s_1, \cdots, s_\ell, t_1, \cdots, t_m, u_1, \cdots, u_n$ を M の斉次な元で次の直和が成立するものとする。

$$M = \left(\bigoplus_{i=1}^{\ell} s_i k(0)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m} t_i k(1)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{m} u_i k(2)\right).$$

$V = (s_1, \cdots, s_\ell, t_1, \cdots, t_m, u_1, \cdots, u_n)$ とおく。M は R-module であるから、$\overset{\circ}{\varphi}_{1i}, \overset{\circ}{\psi}_{1i}, \overset{\circ}{\psi}_{2i} \in k(0)^\ell \oplus k(1)^m \oplus k(2)^n \subset R^{\ell+m+n}$ が存在して

$$\begin{cases} x_1 t_i = V \cdot \mathring{\varphi}_{1i} & (1 \leqq i \leqq m) \\ x_1 u_i = V \cdot \mathring{\psi}_{1i}, \quad x_2 u_i = V \cdot \mathring{\psi}_{2i} & (1 \leqq i \leqq n) \end{cases}$$

が成立する。$e_i = {}^t(\underbrace{0, \dots, 0}_{l+i-1}, 1, 0, \cdots, 0)$, $e'_i = {}^t(\underbrace{0, \cdots\cdots, 0}_{l+m+i-1}, 1, 0, \cdots, 0)$ として

$$\begin{cases} \varphi_{1i} = x_1 e_i - \mathring{\varphi}_{1i} & (1 \leqq i \leqq m) \\ \psi_{1i} = x_1 e'_i - \mathring{\psi}_{1i}, \quad \psi_{2i} = x_2 e'_i - \mathring{\psi}_{2i} & (1 \leqq i \leqq n) \end{cases}$$

とおくと、

<u>Fact 1.</u> $\operatorname{Ker}(R^{l+m+n} \xrightarrow{V} M)$

$$= \left(\bigoplus_{i=1}^{m} \varphi_{1i} k(0)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \psi_{1i} k(0)\right) \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \psi_{2i} k(1)\right).$$

証明は [A.1; Theorem 1.6] をみよ。

さて、このことを先の ideal I に用いて I の free resolution を計算すると次のようなものが得られる。ただし minimal とは限らないことに注意する。

$$(2.1) \quad 0 \longrightarrow R^{b} \xrightarrow{\lambda_3} R^{a+2b} \xrightarrow{\lambda_2} R^{a+b+1} \xrightarrow{\lambda_1} I \longrightarrow 0$$

$$\lambda_1 = (f_0, f_1, \cdots, f_{a+b})$$

$$\lambda_2 = \begin{array}{cccc} \left[\begin{array}{c|c|c} v_{01} & v_{02} & 0 \\ \hline v_1 & v_2 & v_4 \\ \hline v_{21} & v_3 & v_5 \end{array}\right] & \begin{array}{l} \}1 \\ \}a \\ \}b \end{array} \\ \underbrace{\phantom{v_{21}}}_{a}\ \underbrace{}_{b}\ \underbrace{}_{b} & \end{array}, \qquad \lambda_3 = \begin{bmatrix} -v_4 \\ -v_5 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

(2.2) $\begin{cases} 1)\ x_1 1_a - v_1,\ v_{01},\ v_{02},\ v_2 \text{ の成分は } k(1) \text{ の元。} \\ 2)\ x_1 1_b - v_3,\ x_2 1_b - v_5,\ v_4,\ v_{21} \text{ の成分は } k(2) \text{ の元。} \\ 3)\ v_4 \equiv 0 \mod (x_3, x_4) k(2)\ . \end{cases}$

(2.3) $W = \begin{bmatrix} v_{01} & 0 \\ v_1 & v_4 \\ v_2 & v_5 \end{bmatrix}$ とおくと $f_i = (-1)^i \det W(i) / \det v_5$

(W の行は 0 行からはじめる)

<u>Remark.</u> λ_3 の計算、および (2.2) の内容は、§1で述べた存在証明からは明白とは言いがたいが、細かいところにまでたち入って考えればわかる。(2.3) は free resolution の構造定理よりの帰結。詳しくは [A.2; §1] を見よ。

<u>Fact 2.</u> $\mathrm{Hom}_k(H^1_*(\mathcal{F}), k)$

$$\begin{aligned} &\cong R[\bar{n}^2-2] / I_m^R({}^t\lambda_3) \\ &= R[\bar{n}^2-2] / \left(I_m^{k(0)}({}^t v_3) \oplus I_m^{k(1)}({}^t v_5) \oplus N \right) \\ &\cong k(2)[\bar{n}^2-2] / N\ , \end{aligned}$$

ただし $N = \sum_{i \geq 0} I_m^{k(2)} \{ ({}^t \mathring{v}_5)^{i}\, {}^t v_4 \} \subset (x_3, x_4) k(2) [\bar{n}^2-2]$,

$\mathring{v}_5 = x_2 1_b - v_5$.

証明は [A.2 ; pp 802−803] を見よ。

<u>Examples.</u> (1). 次数 a と n $(a \leqq n)$ の曲面の完全交叉.

$$B = (a\,;\, n, n+1, n+2, \cdots, n+a-1).$$

(2). $a=2$ となる integral curve.

$$B = (2\,;\, n, n+1) \quad (\text{完全交叉})$$

$$B = (2\,;\, n^2\,;\, n^{\ell}) \quad (n=2,\ \ell=0 \ \text{又は}\ n \geqq 3,\ \ell \leqq n-2)$$

(3). arithmetically Buchsbaum curve $\iff$ $\mathfrak{m} H^1_*(\mathcal{J}) = 0$ $(\mathfrak{m} := (x_1, x_2, x_3, x_4)R)$ $\iff$ $\mathring{v}_3 \equiv \mathring{v}_5 \equiv 0 \mod (x_3, x_4)k(2)$, $N = I_{\mathfrak{m}}^{k(2)}(x_3 1_\ell, x_4 1_\ell)$ (ただし $\mathring{v}_3 = x_1 1_\ell - v_3$)。またこのとき $H^1_*(\mathcal{J}) \cong k[-(\bar{n}^2 - 2)]$ となっている。これらより

$$B = (a\,;\, \bar{m}, \bar{n}^2, \bar{n}^2\,;\, \bar{n}^2) \quad (\text{up to permutation}).$$

ただし $\bar{m}$ はある整数列。I の生成元をとりかえれば、

$$v_5 = x_2 1_\ell \ , \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3 1_\ell \\ x_4 1_\ell \end{bmatrix}$$

と考えてよい。(2.1) より $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$ であるが、今の場合これは解ける。このことと、(2.3) より arithmetically Buchsbaum curve はほとんどすべて把握できるといえる [A.2 ; §3]。

(4). $\ell = 1$ のとき、$v_3 = x_1$, $v_5 = x_2$ としてよい。v_4 は $k(2)^4$ の元となる。関係式 $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$ はこの場合も容易に解け (c.f. [A.1 ; §4])、$\ell = 1$ となる curve もだいたい把握できる。

例えば次のことがわかる。

$a \geqq 3$, $n_{a+1} \geqq n_a$ のとき、$B(X)=(a;n_1,\cdots,n_a;n_{a+1})$ となるintegral curve X が存在するための必要十分条件は、$a, n_1, \cdots, n_a$ で定まる整数 $\rho(a, n_1, \cdots, n_a)$ があって、$n_{a+1} \leqq \rho(a, n_1, \cdots, n_a)$, かつ $n_i \leqq n_{i+1} \leqq n_i+1$ $(1 \leqq {}^{\forall}i \leqq a-1)$ (c.f. [A.1; Proposition 4.4])。

§3. Integral Curve についての Remarks.

<u>Definition</u>. $(z_i)_{i \geq 1}$ が整数列で、すべての i に対して $z_i \leqq z_{i+1} \leqq z_i+1$ となるとき、(z_i) は connected であるとよぶ。

以下考えるcurve X はintegralであると仮定し、そのbasic sequence $B(X)=(a;\overline{n}^1;\overline{n}^2)=(a;n_1,\cdots,n_a;n_{a+1},\cdots,n_{a+e})$ についてわかっていることを述べる。講演の後にまとまったことも書いておく。

(1). [A.3; Corollary 1.2, 1.3]、$\overline{n}^1$ はconnectedでしかも

$$\mathrm{rank}_k(V_1)\ (\mathrm{mod}\ m) \geqq \#\{n_1, n_2, \cdots, n_a\}-1.$$

(2). [G-P.1; Théorèm 2.5]、$e=0$ ならば、$B(X)=(a;\overline{n}^1)$ となるintegral curve X が存在する $\Longleftrightarrow$ $\overline{n}^1$ がconnected。

(3). $2 \leqq a' \leqq a$ を満たすある整数 a' に対して $n_i = n_1 + i - 1$ ($1 \leqq {}^\forall i \leqq a'$) が成立すれば、$n_{a'} \leqq n_{a+1}$ である。

(4). $n_1 = n_2$ で、$3 \leqq a' \leqq a$ を満たすある整数 a' に対して $n_i = n_1 + i - 2$ ($2 \leqq {}^\forall i \leqq a'$) とする。$b' = \max\{ j \mid n_{a+1}, n_{a+2}, \cdots, n_{a+j}$ が connected $\}$ とおく。そして

イ) $n_{a+b'} = n_{a+b'-1}$ なら $j_0 = \min\{ j' \mid n_{a+j} = n_{a+b'} - (b'-1-j),\ j' \leqq {}^\forall j \leqq b'-1 \}$

ロ) $n_{a+b'} \neq n_{a+b'-1}$ なら $j_0 = \min\{ j' \mid n_{a+j} = n_{a+b'} - (b'-j),\ j' \leqq {}^\forall j \leqq b' \}$

とおく。このとき $n_{a'} \leqq n_{a+j_0}$ が成立する。

(5). $n_i = n_1 + i - 1$ ($1 \leqq {}^\forall i \leqq a$) であるとする。このとき $b \geqq 3$ でしかも $(n_{a+1}, n_{a+2}, n_{a+3})$ は connected となる。また、$b' = \max\{ j' \mid n_{a+j} = n_{a+1} + j - 1,\ 1 \leqq {}^\forall j \leqq j' \}$ とおくと、$b' < b$ で $n_{a+b'+1} = n_{a+b'}$ が成立する。(3)より $n_a \leqq n_{a+1}$ も成立する。

(4)と(5)の内容はもっと改善されるべきであると思われる。筆者は(5)の仮定が成立するような integral curve の例を知らない。(3)〜(5)の証明には次の事実を用いる。i). length $(H^1_*(\mathcal{I})) < \infty$ ii). $\lambda_2 \cdot \lambda_3 = 0$. iii). (1)の内容 iv). §1 の $H^1_*(\mathcal{I})$ の $k(z)$-module としての minimal free resolution に出てくる $\mathcal{E}^0$ は、座標 x_1, x_2, x_3, x_4 を少し動かしても変わらない。

証明は書くと長くなるので省略する。i), ii), iii) がどのように用いられるかは [A, 3; Lemma 1.4] をみるとわかる。

X の degree を d, arithmetic genus を g とおくと

$$\begin{cases} d = \sum_{i=1}^{a} n_i - \frac{1}{2}a(a-1) - b \\ g = 1 + b - \frac{1}{6}a(a-1)(a-5) + \sum_{i=1}^{a} \frac{1}{2} n_i(n_i - 3) - \sum_{j=1}^{b} n_{a+j} . \end{cases}$$

今まで述べた条件のほかに、Riemann-Roch の定理、Castelnuovo の定理（ $H^1(\mathcal{I}(\nu)) = 0$, $\nu \geqq d-2$ ）などを満たすような数列 $(a; n_1, \cdots, n_a; n_{a+1}, \cdots, n_{a+b})$ を $d = 10$, $0 \leqq g \leqq 12 = [1 + \frac{1}{6}d(d-3)]$ (c.f. [G-P, 2; p401]) について computer を用いて計算してみると、次のようなことになる。

① $(d, g) = (10, 12)$

$(2; 7^2; 7^3)$, $(3; 4^2, 5)$

② $(d, g) = (10, 11)$

$(3; 4, 5^2; 5)$, $(4; 4^4)$, $(4; 4^3, 5; 4)$

③ $(d, g) = (10, 10)$

$(3; 4, 5^2; 6)$, $(3; 5^3; 5^2)$, $(4; 4^3, 5; 5)$

④ $(d, g) = (10, 9)$

$(3; 4, 5^2; 7)$, $(3; 5^3; 5, 6)$, $(4; 4^3, 5; 6)$, $(4; 4^2, 5^2; 5^2)$

⑤ $(d,g)=(10,8)$

$(3;5^3;5,7)$, $(3;5^3;6^2)$, $(4;4^2,5^2;5,6)$, $(4;4,5^3;5^3)$

⑥ $(d,g)=(10,7)$

$(2;8^2;8^5)$, $(3;5^3;5,8)$, $(3;5^3;6,7)$, $(3;5^2,6;6^3)$, $(4;4^2,5^2;5,7)$
$(4;4^2,5^2;6^2)$, $(4;4,5^3;5^2,6)$, $(4;4,5^2,6;5^3,6)$, $(4;5^4;5^4)$

以下だんだん増えていき、$(d,g)=(10,0)$ ではおよそ110個ぐらい出てくる。これらすべてが実際に integral curve の basic sequence になっているとはとても思えず、条件は不十分であるといえる。上にあげたもので $g\geq 8$ については、$(4;4^2,5^2;5,6)$, $(3;5^3;5,7)$ を除いて、すべて実際に integral curve に対応することが確かめられている。$(d,g)=(10,9)$ の場合について少し述べよう。C_0 を $\Sigma_1=\mathbb{P}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}\oplus\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(-1))$ の exceptional divisor, f を $\Sigma_1\to\mathbb{P}^1$ の fiber とする。S_0 を $\Phi_{|C_0+2f|}:\Sigma_1\longrightarrow\mathbb{P}^4$ の image を general な点から $\mathbb{P}^3$ へ projection して得られた3次曲面 (c.f. [G-P.2; Appendice B]), S を smooth cubic surface とする。

$(3;4,5^2;7)$ ------ S_0 上の曲線 $\sim 3C_0+7f$

$(3;5^3;5,6)$ ------- S_0 上の曲線 $\sim 4C_0+6f$　又は

S 上の曲線 $\sim 7l-3e_1-2(e_2+e_3+e_4)-e_5-e_6$

$(4;4^3,5;6)$ ------- §2 の Example (4) で述べたもの。

$(4;4^2,5^2;5^2)$ -------- 次の§でひとつのつくり方を述べる。

§4. 与えられた $H^1_*(\mathcal{I})$ と Basic Sequence をもつような curve

長さ有限の R-module M が与えられ、その $k(2)$-module としての minimal free resolution が general な座標に対しては

$$(4.1)\quad 0 \longrightarrow k(2)[-\bar{\varepsilon}^2] \xrightarrow{G} k(2)[-\bar{\varepsilon}^1] \xrightarrow{H} k(2)[-\bar{\varepsilon}^0] \xrightarrow{(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)} M \longrightarrow 0$$

となっているとせよ。ただし、$\alpha_1,\cdots,\alpha_p$ は M の生成元で、$\bar{\varepsilon}^i$ $(i=0,1,2)$ は §1 と同様。M は R-module であるから

$$(\alpha_1,\cdots,\alpha_p)(x_1 1_p - P) = 0 \quad , \quad (\alpha_1,\cdots,\alpha_p)(x_2 1_p - Q) = 0$$

となる $k(2)$ の元を成分とする $p \times p$ 行列 P, Q がある。また整数列 $(a; n_1,\cdots,n_a) = (a; \bar{n}')$ で $a \leqq n_1 \leqq \cdots \leqq n_a$, $n_i \leqq \varepsilon^2_i$ $(1 \leqq {}^\forall i \leqq r)$ を満たすものが与えられ次のようになっているとする。

$$(*)\quad (\bar{n}'+1, \bar{\varepsilon}^0+2, \bar{\varepsilon}^1+1, \bar{\varepsilon}^1+1) = (\bar{\varepsilon}^1+2, \bar{m}) \quad \text{(up to permutation)}$$

ただし $\bar{m} = (m_1,\cdots,m_{a+p+q})$ はある整数列。このとき

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{\varepsilon}^0-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{n}') \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{\varepsilon}^0-1) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{\varepsilon}^1)$$

とおいて rank $1+a+p+q$ の vector bundle $\mathcal{F}_1$ と完全列

$$(4.2) \qquad 0 \longrightarrow \mathfrak{F} \longrightarrow \mathcal{L}_1 \xrightarrow{\ \mu\ } \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{\varepsilon}^{\circ}) \longrightarrow 0$$

$$\mu = (0 \mid x_1 1_p - P \mid 0 \mid x_2 1_p - Q \mid H)$$

によって定める。直接計算すれば $c_1(\mathfrak{F}) = -\sum_{i=1}^{a+p+q} m_i$ となる。もし $H^0(\mathfrak{F}(\bar{m})) := H^0(\bigoplus_{i=1}^{a+p+q} \mathfrak{F}(m_i))$ の元 $\hat{s}$ の dependency locus が $\mathbb{P}^3$ の中で codimension 2 であれば、その ideal sheaf を $\mathcal{I}$ とおくと完全列

$$(4.3) \qquad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-\bar{m}) \xrightarrow{\ \times\hat{s}\ } \mathfrak{F} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

を得る。これから $\mathcal{I}$ はある curve の ideal sheaf となっていることがわかり $H^1_*(\mathcal{I}) \cong M$。実際には、$\mathbb{P}^3$ の curve の ideal sheaf は皆このようにしてできる locally free resolution をもつ (c.f. [A.2; §2])。

<u>Fact 3.</u> $h^0(\mathcal{I}(n)) = \binom{n-a+3}{3}_+ + \sum_{i=1}^{a}\binom{n-n_i+2}{2}_+ + \sum_{i=1}^{r}\binom{n-\varepsilon^2_i+1}{1}_+$

証明には、(4.1), (4.2), (4.3), (*) を用いて直接 $h^0(\mathcal{I}(n))$ を計算すればよい。

$\hat{s}$によって定まる上の curve を X と書くと、(4.1) と Fact3 より $B(X) = (a; \bar{n}'; \bar{\varepsilon}^2)$ (up to permutation of $\bar{\varepsilon}^2$) が成立する。

<u>Example</u>. $(4; 4^2, 5^2; 5^2)$ の場合。

$$\begin{cases} A = B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \\ V_1 = x_1 1_2 - x_3 A, \quad V_2 = x_2 1_2 - x_4 B \\ H_1 = x_3 1_2 - x_4 C, \quad H_2 = x_4^2 1_2, \quad H = (H_1, H_2) \end{cases}$$

とし、

$$M = R[-2]^2 / \mathrm{Im}^R(V_1, V_2, H)$$

とおく。M は $k(2)$-module としての minimal free resolution

$$0 \longrightarrow k(2)[-5^2] \xrightarrow{\begin{pmatrix} -H_2 \\ H_1 \end{pmatrix}} k(2)[-3^2, -4^2] \xrightarrow{H} k(2)[-2^2] \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

を持つ。(出てくる数 2,3,4,5 は、x_1, x_2, x_3, x_4 を変えても変わらない。) rank 6 の vector bundle $\mathcal{E}$ を完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-3)^6 \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4)^2 \xrightarrow{(V_1, V_2, H)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-2)^2 \longrightarrow 0$$

によって定めると (4.2) における $\mathcal{F}$ は $\mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4, -4^2, -5^2)$ と一致する。一方 $(\bar{n}'+1, \bar{\varepsilon}^0+2, \bar{\varepsilon}'+1, \bar{\varepsilon}'+1) = (5^2, 6^2, 4^2, 4^2, 5^2, 4^2, 5^2)$ $= (\bar{\varepsilon}'+2, \bar{m})$ (up to permutation) より $\bar{m} = (4^6, 5^4)$。よって (4.3) は

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4^6, -5^4) \xrightarrow{\tilde{S}} \mathcal{E} \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4^3, -5^2) \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

となる。$\tilde{s}$を十分 general にとれば、これは

$$(4.4)\quad 0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4^3, -5^2) \longrightarrow \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

に還元されると思ってよい。

<u>Fact 4.</u> 1). $\mathcal{E}(5)$ は $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}$ 上 global sections で生成される。

2). $H^0(\mathcal{E}(4))$ の k-vector space としての basis は

$$\Psi := \begin{bmatrix} -V_2 & -H_1 & 0 \\ V_1 & 0 & -H_1 \\ 0 & V_1 + x_4[A, C] & V_2 \\ 0 & C[A, C] & [B, C] \end{bmatrix}$$

の列により与えられる。ただし $[\ ,\ ]$ は Lie bracket.

3). Ψ によってできる $\mathcal{E}(4)$ の 6 つの sections からなる行列を $\tilde{\Psi}$ とおくと $\det(\tilde{\Psi})$ によって定まる division は $x_1^2 - x_3^2 - x_2^2 + x_4^2 = 0$ で smooth.

4). $H^0(\mathcal{E}(4^3)) \ni \tilde{s}_1$ を general にとると完全列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-4^3) \xrightarrow{\tilde{s}_1} \mathcal{E} \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow 0$$

によって定まる sheaf $\mathcal{E}'$ は locally free であり、従って (4.4) のかわりに

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-5^2) \longrightarrow \mathcal{E}' \longrightarrow \mathcal{I} \longrightarrow 0$$

を考えればよい。

5). 体 k の標数は 0 だから、1)より、十分 general な $H^0(\mathcal{E}'(5^2))$ の元 $\hat{s}_2$ を選べば、これが smooth curve X で $B(X) = (4; 4^2, 5^2; 5^2)$ となるものを定めることとなる。$H^1(\mathcal{I}) = 0$ であるから X は connected で、smooth irreducible curve となっていることが判明する。

Remarks. 1). 上の例はもっと一般化できている。

2). 上のようにすれば、うまく与えられた basic sequence を持つ smooth で irreducible な arithmetically Buchsbaum curve をつくることは容易であろう。

References

[A.1] Amasaki, M., Preparatory Structure Theorem for Ideals Defining Space Curves, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 19 (1983), 493-518.

[A.2] ――――, On the Structure of Arithmetically Buchsbaum Curves in $\mathbb{P}^3_k$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 20 (1984), 793-837.

[A.3] ――――, Examples of Nonsingular Irreducible Curves Which Give Reducible Singular Points of red $(H_{d,g})$, Publ. RIMS, Kyoto Univ. 21 (1985), 761-786.

[G-P.1] Gruson, L. et Peskine, C., Genre des courbes de l'espace projectif, Proceedings, Tromsø, Norway 1977, Lecture Notes in Mathematics No. 687, Springer-Verlag.

[G-P.2] ______________________, Genre des courbes de l'espace projectif (II), Ann. Scient. Ec. Norm. Sup., 4e série, t. 15 (1982), 401-418.